

## ЕЛЕКТРОНІКА, РАДІОТЕХНІКА ТА ЗАСОБИ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ

УДК 621.372.061

І.О. Сушко, О.І. Рибін

### ВІЗУАЛІЗАЦІЯ РОЗПОДІЛУ ПОВЕРХНЕВИХ ПРОВІДНОСТЕЙ МЕТОДОМ ЗОН ПРОВІДНОСТІ

The usage of modification method for direct EIT problem solving is substantiated. The voltages on phantom contour with known current approximation of surface conductivity distribution are calculated. The classical algorithm with Newton–Raphson method for inverse EIT problem solving is shown. That is “refinement” of surface conductivities by results of analysis. The conductivity zones method to reduce the order and time of calculations is described (transition from solution of the equation with 1000 order to 16 times solving the equations with 14 order). The regularization method by A.N. Tykhonov to solve the problem of ill-conditioned derivatives matrices from transfer resistances (nodal voltages) on surface zones conductivities solving the image reconstruction problem in EIT is considered. The algorithm of fast iterative updating regularization algorithm is given. It allows solving the problem by 10–20 steps instead of 1000–1000000 steps of classic algorithm. The expediency of classifier creating to assess the presence or absence of heterogeneity compared to uniform phantom is shown.

**Keywords:** Electrical Impedance Tomography, conductivity, conductivity zones, direct and inverse problem, image reconstruction, Newton–Raphson method, regularization by A.M. Tykhonov, phantom, inhomogeneity.

#### Вступ

Метод електроімпедансної томографії (ЕІТ) полягає в обчисленні розподілення поверхневих провідностей уявного розтину досліджуваного об'єкта (фантома) за результатами вимірювань напруг (проекцій) по обводу контуру цього об'єкта при відомих незалежних збуджувачих струмах джерела струму [1–4].

Задачу візуалізації доцільно розв'язувати в ітераційній процедурі. Ітераційна процедура [5–10] обчислення розподілення поверхневих провідностей усередині фантома (реконструкція за результатами вимірювань) складається з двох взаємопов'язаних задач: задачі аналізу, яка базується на використанні методу скінченних елементів [11–17] (обчислення напруг по обводу контуру фантома при наданих у поточному наближенні розподілах поверхневих провідностей), та задачі синтезу [1, 2, 18–23] (уточнення поверхневих провідностей за результатами аналізу). Розв'язання зворотної задачі пов'язано з операціями над погано зумовленими матрицями похідних від передаточних опорів по поверхневих провідностях скінченних елементів. Тому значного поширення набули методи регуляризації процесу розв'язання рівнянь [24–30], які вимагають великої кількості операцій.

#### Постановка задачі

Метою роботи є розроблення методів та алгоритмів візуалізації розподілу поверхневих

провідностей усередині томографічного розтину досліджуваного об'єкта.

#### Вихідні положення

Серед ітераційних процедур реконструкції найбільш простими є ті, що базуються на градієнтних методах, зокрема на методі Ньютона–Рафсона [5, 6]. Найбільш зручним і поширеним (унаслідок простоти та прозорості) методом моделювання фантома є метод скінченних елементів [7]. При застосуванні цього методу фантом розбивають на велику кількість геометричних фігур (трикутники, прямокутники, квадрати тощо), кожен з яких моделюється відповідною електричною схемою з відомими опорами (провідностями) гілок так, що вхідні опори скінченного елемента дорівнюють вхідному опору електричної еквівалентної схеми. Бажання отримати задовільну точність апроксимації фантома скінченними елементами вимагає збільшення їх кількості  $M$ , що приводить до зростання порядку  $N$  системи рівнянь вузлових напруг

$$\bar{Y} \bar{U} = \bar{I}, \quad (1a)$$

де  $\bar{Y}$  – матриця вузлових провідностей (адмітансів) порядку  $N$ ;  $\bar{U}$  – вектор-стовпець вузлових напруг розміру  $N \times 1$ ;  $\bar{I}$  – вектор-стовпець незалежних джерел струму.

Розв'язок (1a) має вигляд

$$\bar{Y}^{-1} \bar{I} = \bar{U}. \quad (16)$$

Тобто для обчислення усіх напруг (в т.ч. і по обводу контуру фантома) необхідно обернути матрицю порядку  $N$ . Зрозуміло, що, наприклад, для фантома квадратної форми при розбитті його по горизонталі та вертикалі на 32 інтервали кількість скінченних елементів  $M = 1024$ , а порядок матриці  $\bar{Y}$  в (1а)  $N = 1088$ . Використання ітераційних методів при реконструкції образу з проєкцій вимагає створення відповідних систем рівнянь, порядки яких дорівнюють кількості невідомих провідностей, тобто скінченних елементів. Таким чином, розв'язання прямої та зворотної задач ЕІТ наштовхується (внаслідок великих порядків систем рівнянь) на значні математичні труднощі. В статті пропонується методика реалізації методу ЕІТ на базі розроблених авторами методів та алгоритмів.

#### Розв'язання прямої задачі ЕІТ методом модифікації

При розв'язанні прямої задачі ЕІТ відповідно до (1) при класичному підході варто на базі еквівалентних електричних схем окремих скінченних елементів створити еквівалентну електричну схему фантома в цілому і на її основі скласти систему рівнянь вузлових напруг (1а) та її розв'язати. Структура фантома така, що в матриці провідностей  $\bar{Y}$  в кожному з рядків (розміру  $1 \times N$ , наприклад, при  $N = 1088$ ) не більше як дев'ять елементів будуть не нульовими. Таким чином, матриця  $\bar{Y}$  буде розрізною. Тому для обчислення оберненої матриці провідностей  $\bar{Y}^{-1}$  у подальшому будемо використовувати метод модифікацій [8–10]. Суть методу полягає в тому, що спочатку треба знайти обернену матрицю для елементарної ділянки схеми (в нашому випадку це один квадратний скінченний елемент [11–13]). Обернені матриці скінченних елементів відрізняються між собою лише ваговими множниками, рівними поверхневим опорам цих елементів [11]. У подальшому за алгоритмом методу модифікацій дві обернені матриці двох скінченних елементів об'єднуються, що дає обернену матрицю фрагменту схеми, який складається з двох скінченних елементів. Аналогічно, ці два елементи об'єднуються з третім або з двома іншими і т.д. [14–16]. Розроблені алгоритми

дали можливість обчислювати обернені матриці  $N = 800$ – $4000$  порядків [12, 15] та будувати картини поля всередині фантома (лінії рівної напруги). В разі використання (для розв'язання зворотної задачі) складних об'єднань скінченних елементів (зон провідності) розроблено модифікацію алгоритму формування оберненої матриці провідностей фантома [17], що дало змогу значно скоротити кількість операцій та об'єм пам'яті при аналізі на кожному кроці ітераційної процедури. Отримано значне спрощення процедур аналізу поточного фантома, яке ґрунтується на врахуванні структури його аналізованої електричної моделі (якій відповідає розріджена матриця провідностей системи рівнянь вузлових напруг). Гірша ситуація має місце при розв'язанні лінійних рівнянь ітераційної процедури задачі реконструкції.

#### Розв'язання зворотної задачі ЕІТ

Зворотна задача ЕІТ (реконструкція) полягає в обчисленні розподілення поверхневих опорів усередині фантома за вимірними проєкціями (напругами по обводу контуру фантома або, що те ж саме, по передаточних опорах на вимірювальних електродах). Така залежність є нелінійною і описується складними формулами, якими не можна на практиці користуватися. Тому для розв'язання зворотної задачі варто використовувати ітераційні методи для мінімізації різниці між напругами, обчисленими для наданого поточного фантома, та напругами вимірними. Кількість вимірних передаточних опорів (напруг) має дорівнювати кількості  $M$  скінченних елементів (наприклад,  $M = 776$  для круглого фантома з 32-ма скінченними елементами в діаметрі та  $N = 840$  вузлами), що створює додаткові труднощі як внаслідок великої кількості рівнянь, так і через те, що заздалегідь невідомо, які з вимірюваних напруг менш корельовані між собою. Крім того, чутливість напруг по обводу контуру до змін провідностей усередині фантома є значно гіршою, ніж чутливість вимірюваних проєкцій (до змін відповідних параметрів) у рентгенівській, емісійній, магнітно-резонансній, ультразвуковій томографіях.

При використанні методу Ньютона–Рафсона для розв'язання задачі реконструкції в імпульсній томографії використовують наведений нижче класичний алгоритм.

1. Розбити (дискретизувати) розтин об'єкта дослідження на скінченні елементи (пікселі

зображення), замінивши скінченні елементи їх електричними еквівалентними схемами.

Кількість скінченних елементів  $M$  визначає кількість необхідних вимірювань незалежних передаточних опорів (напруг на обводу контуру розтину).

2. Провести  $M$  вимірювань незалежних передаточних опорів  $Z_{\text{пер}}^{(i)}$  (при різних положеннях збуджуючого джерела струму).

3. Якщо відомо наближення розподілення поверхневих провідностей  $\sigma_k$  окремих скінченних елементів, розв'язати пряму задачу ЕІТ для цих провідностей. При відсутності апріорної інформації про образ задати всі поверхневі провідності “нульового наближення” рівними між собою.

Комбінації елементів зворотної матриці (незмінної для всіх положень джерела струму збудження) дають обчислені значення передаточних опорів  $\tilde{Z}_{\text{пер}}^{(i)}$  [10].

4. Порівняти відповідні виміряні  $Z_{\text{пер}}^{(i)}$  та розраховані  $\tilde{Z}_{\text{пер}}^{(i)}$  значення передаточних опорів та знайти похибки (нев'язки):

$$\Delta Z_i = Z_{\text{пер}}^{(i)} - \tilde{Z}_{\text{пер}}^{(i)}.$$

5. Використовуючи вибрану норму невід'язки для усіх  $\Delta Z_i$  (Чебишова, Хеммінга або Евкліда і т.д.), оцінити числове значення невід'язки  $\delta$ .

6. Якщо  $\delta \leq \delta_{\text{гр}}$ , то припинити подальші обчислення та задати відповідним скінченним елементам розраховані значення поверхневих провідностей  $\sigma_k$ . Кожній провідності  $\sigma_k$  задати відповідний колір або рівень “сірого” і відобразити цим кольором (рівнем сірого) кожен  $k$ -й піксель зображення.

Тут  $\delta_{\text{гр}}$  — вибране граничне значення невід'язки, при якому отриманий образ вважають задовільним. Це значення знаходять емпірично при реалізації алгоритму.

Якщо  $\delta \geq \delta_{\text{гр}}$  перейти до пункту 7 алгоритму.

7. За поточною зворотною матрицею  $\bar{Z} = \bar{Y}^{-1}$  обчислити похідні  $\frac{\partial Z_{\text{пер}}^{(i)}}{\partial \sigma_k}$  для всіх  $M$  передаточних опорів по всіх поточних поверхневих провідностях  $\sigma_k$  [18].

8. Сформулювати систему рівнянь

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial Z_{\text{пер}}^{(1)}}{\partial \sigma_1} & \dots & \frac{\partial Z_{\text{пер}}^{(1)}}{\partial \sigma_M} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial Z_{\text{пер}}^{(M)}}{\partial \sigma_1} & \dots & \frac{\partial Z_{\text{пер}}^{(M)}}{\partial \sigma_M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \sigma_1 \\ \dots \\ \Delta \sigma_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta Z_1 \\ \dots \\ \Delta Z_M \end{bmatrix}$$

або, в скороченому записі,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial Z_{\text{пер}}^{(i)}}{\Delta \sigma_k} \end{bmatrix} [\Delta \sigma_k] = [\Delta Z_i], \quad (2)$$

де  $[\Delta \sigma_k]$  — корекції поточних значень поверхневих провідностей, що зменшують норму невід'язки.

9. Розв'язати рівняння (2) і знайти шукані корекції провідностей

$$[\Delta \sigma_k] = - \left[ \frac{\partial Z_{\text{пер}}^{(i)}}{\partial \sigma_k} \right]^{-1} [\Delta Z_i]. \quad (3)$$

10. Скорегувати значення усіх поверхневих провідностей

$$\tilde{\sigma}_k = \Delta \sigma_k + \sigma_k,$$

де  $\tilde{\sigma}_k$  — нове поточне значення поверхневої провідності скінченного елемента.

11. Перейти до третього пункту алгоритму.

У наведеному алгоритмі є кілька “вузьких” місць, які мають бути ліквідовані.

Найбільшою проблемою є багаторазове (в ітераційній процедурі) розв'язання рівняння корекції (3). Крім того, навіть інтуїтивно зрозуміло, що при малих розмірах скінченних елементів ( $M \approx 700-4000$ ) чутливість передаточного опору до зміни провідності скінченного елемента поблизу центра фантома буде малою. Більше того, помилка в координаті такого елемента майже не змінить значення передаточного опору, розрахованого відносно зовнішнього

обводу фантома. Отже, матриця  $\left[ \frac{\partial Z_{\text{пер}}^{(i)}}{\partial \sigma_k} \right]$  буде

погано зумовленою. Великі розміри цієї матриці лише підсилюють згадані негативні явища.

Обернення матриці похідних (3) великого порядку або дасть дуже велику похибку обчислень (тоді не варто сподіватися на збіг до розв'язку з малою невід'язкою), або буде вимагати великих витрат часу.

Збільшення розрядності розрахунків (враховуючи дуже обмежену розрядність вимірювань) не дасть позитивних результатів, збільшить час обчислень в ітераційній процедурі.

Одним із продуктивних методів є збільшення розмірів скінченних елементів усередині фантома та зменшення їх по боках. Але це ускладнює процедуру дискретизації, хоча широко використовується на практиці.

### Метод зон провідності

Для зведення громіздкої задачі обернення матриці похідних та обчислення корегуючих прирощень провідностей скінченних елементів було запропоновано метод зон провідностей [19–21]. Він полягає в розбитті фантома на певні (відносно великі) зони (рис. 1), які складаються зі скінченних елементів (у вигляді квадратів) і зв'язані між собою вузлами зовнішніх (для кожної зони) скінченних елементів.

Так, на рис. 1, *a* наведено круглий фантом, розбитий на 776 квадратних скінченних елементів. В дужках наведено номери електродів по обводу контуру фантома, до пари з яких

прикладається незалежне джерело струму, а на інших електродах вимірюються (або обчислюються) напруги (проекції).

На рис. 1, *б–г* наведено деякі можливі форми зон провідностей, всередині яких провідність вважається однаковою для усіх квадратних скінченних елементів. Так, на рис. 1, *б* зображено 14 зон. Джерело струму підключено до вузлів 0–8. Вимірювані (обчислювані) напруги – це вузлові напруги (відносно загального вузла 0) на електродах 1, 2, ..., 7, 9, ..., 15. За алгоритмом методу Ньютона–Рафсона знаходимо провідності кожної із зон при підключенні джерела струму до вузлів 0–8. Далі переміщаємо джерело струму до вузлів 1–9 (тепер загальним стає вузол 1) та повертаємо (разом з джерелом) зони фантома на той самий кут  $360^\circ / 16$ . Для цього зонного фантома знову визначаємо провідності зон і аналогічно знаходимо зонні провідності для усіх 16-ти зонних фантомів. Далі накладаємо зонні фантоми один на одного (з урахуванням кута оберту) та підсумовуємо провідності зон у квадратних скінченних елементах. Растр, отримуваний у результаті накладання зонних фантомів на рис. 1, *б, в,*

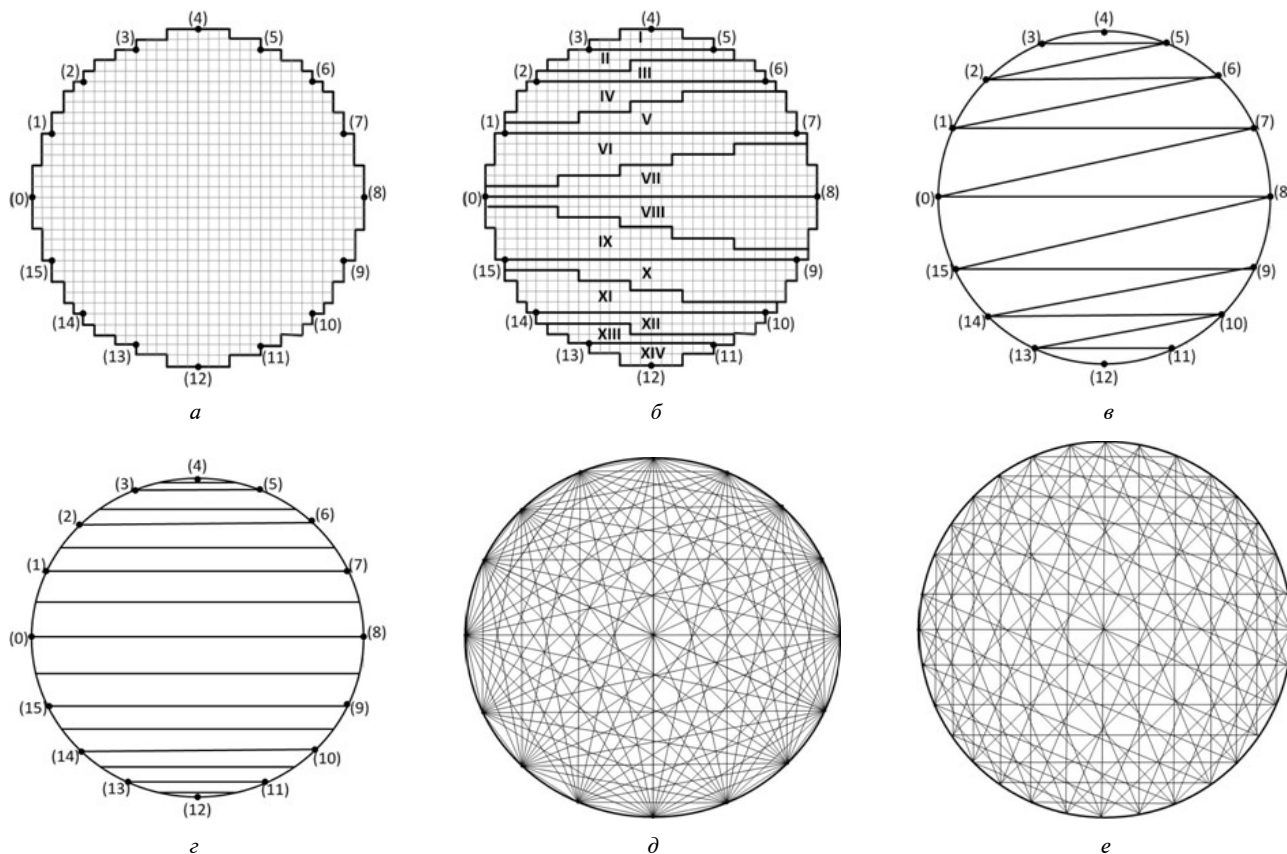


Рис. 1. Приклади розбиття фантома на скінченні елементи (*a*), на зони (*б–г*) та сумарні растри накладання зон (*д, е*)

має вигляд рис. 1,  $\delta$ , а растр фантома рис. 1,  $\varepsilon$  – рис. 1,  $e$ .

Зрозуміло, що значно легше 16 разів розв'язати ітераційну задачу на основі рівнянь (2) 14-го порядку, ніж один раз – таку саму задачу, але 776-го порядку.

Метод зон провідностей заснований на припущенні, що неоднорідність, яка займає певну частину зони в ітераційній процедурі, буде відображатися деяким складним чином усередненим значенням по всій зоні цієї провідності. Результати обчислень [23] на тестових прикладах показали коректність такого припущення, тобто провідність неоднорідності певним чином усереднюється на всю зону провідності, причому ще й “розповзається” (з прирошеннями провідності, значно меншими, ніж у власній для неоднорідності зоні) на сусідні зони.

### Регуляризація рівнянь за А.М. Тихоновим

Наступною складністю реалізації алгоритму методу Ньютона–Рафсона є погана зумовленість матриці похідних. Причому навіть для зонного фантома з 14-ма зонами підстановка корегуючих прирошень провідностей (3) в (2) дає значну нев'язку (порядку  $10^{-2} \dots 10^{-3}$ ), що, враховуючи невеликі прирошення  $[\Delta Z_i]$  для фантома з неоднорідністю порівняно до рівномірного фантома [16], робить ітераційну процедуру безперспективною. Це зумовлене симетрією зон фантома з рис. 1 (при симетричному зонному фантомі визначник матриці  $\left[ \frac{\partial Z_{\text{пер}}^{(i)}}{\Delta \sigma_k} \right]$

тотожний нулю, хоча обчислення з обмеженою розрядністю дають значення  $10^{-27} \dots 10^{-40}$ ), що можна обійти несиметричним підключенням джерела струму [23, 24]. Але навіть при несиметричному підключенні джерела для матриці похідних 14-го порядку визначник дорівнює  $10^{-12} \dots 10^{-16}$  і точне розв'язання рівняння (2) неможливе.

Для розв'язання погано зумовлених рівнянь варто використовувати регуляризацію за А.М. Тихоновим [25–30]. Ідея регуляризації

полягає в доданні до діагоналі матриці  $\left[ \frac{\partial Z_{\text{пер}}^{(i)}}{\Delta \sigma_k} \right]$

діагоналі невеликих чисел, таких, що похибка від додання цих чисел буде малою, а система рівнянь (2) – добре зумовленою:

$$(\bar{\Psi} + \alpha \bar{D}_{\Psi}) [\Delta \sigma_k] = - \left[ \frac{\partial Z_{\text{пер}}^{(i)}}{\partial \sigma_k} \right]^T [\Delta Z_i], \quad (4)$$

де  $\bar{\Psi} = \left[ \frac{\partial Z_{\text{пер}}^{(i)}}{\partial \sigma_k} \right]^T \left[ \frac{\partial Z_{\text{пер}}^{(i)}}{\partial \sigma_k} \right]$ ;  $T$  – знак транспонування;  $\bar{D}_{\Psi}$  – діагональ матриці  $\bar{\Psi}$ ;  $\alpha$  – коефіцієнт регуляризації.

Тоді

$$[\Delta \sigma_k] = -(\bar{\Psi} + \alpha \bar{D}_{\Psi})^{-1} \left[ \frac{\partial Z_{\text{пер}}^{(i)}}{\partial \sigma_k} \right]^T [\Delta Z_i]. \quad (5)$$

Внесення додаткової складової  $\alpha \bar{D}_{\Psi}$  вносить певну похибку в (2). Таким чином, при отриманні реконструйованого образу, в загальному випадку, не зрозуміло, наскільки отриманий результат є достовірним. Тим не менше було отримано задовільні результати для низки прикладів [28–30], що свідчить про те, що при наявності певної апіорної інформації про реконструйований образ використання виразів (4), (5) може бути коректним.

Існує алгоритм регуляризації, вільний від вказаної похибки. Вираз (2) і (4) можна подати у вигляді ітераційної формули

$$\begin{aligned} - \left[ \frac{\partial Z_{\text{пер}}^{(i)}}{\partial \sigma_k} \right]^T \left[ \frac{\partial Z_{\text{пер}}^{(i)}}{\partial \sigma_k} \right] [\Delta \sigma_k]^{(n)} - \alpha \bar{D} [\Delta \sigma_k]^{(n)} = \\ = \left[ \frac{\partial Z_{\text{пер}}^{(i)}}{\partial \sigma_k} \right]^T [\Delta Z_i] - \alpha \bar{D} [\Delta \sigma_k]^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{Позначимо } \bar{\Psi}^{-1} = \left( \left[ \frac{\partial z_m}{\partial \sigma_r} \right]^T \left[ \frac{\partial z_m}{\partial \sigma_r} \right] + \alpha \bar{D} \right)^{-1}$$

та отримаємо

$$\begin{aligned} [\Delta \sigma_k]^{(n)} = -\bar{\Psi}^{-1} \left[ \frac{\partial Z_{\text{пер}}^{(i)}}{\partial \sigma_k} \right]^T [\Delta z_m] + \\ + \bar{\Psi}^{-1} \alpha \bar{D} [\Delta \sigma_k]^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{Позначимо далі } \bar{A} = \bar{\Psi}^{-1} \left[ \frac{\partial z_m}{\partial \sigma_r} \right]^T [\Delta z_m];$$

$\bar{B} = \bar{\Psi}^{-1} \alpha \bar{D}$ . Тоді (7) матиме вигляд

$$[\Delta \sigma_r]^{(n)} = -\bar{A} + \bar{B} [\Delta \sigma_r]^{(n-1)}. \quad (8)$$

### Швидка модифікація ітераційного алгоритму регуляризації

Обчислення за ітераційною процедурою (8) одного стовпця корегуючих прирошень провідностей у загальній ітераційній процедурі методу Ньютона–Рафсона вимагають значної кількості ітерацій. Так, навіть для прикладу з двома зонами [29] кількість ітерацій становить сотні тисячі, а для матриці похідних з 14-ма зонами – сотні тисяч–сотні мільйонів [23]. Тому авторами запропоновано використовувати ітераційну процедуру (8) з логарифмічним кроком ітерацій. Для цього введемо блочну матрицю

$$\bar{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \bar{0}^T \\ \bar{A} & \bar{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{0}^T \\ \bar{\gamma}_1 & \bar{B} \end{bmatrix}. \quad (9a)$$

Тоді

$$\bar{\beta}_2 = \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \bar{0}^T \\ \bar{\gamma}_1 & \bar{B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \bar{0}^T \\ \bar{\gamma}_1 & \bar{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{0}^T \\ \bar{\gamma}_2 & \bar{B}^2 \end{bmatrix};$$

$$\dots, \bar{\beta}_k = \bar{\beta}_{k-1} \bar{\beta}_{k-1} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{0}^T \\ \bar{\gamma}_{k-1} & \bar{B}^{k-1} \end{bmatrix} \text{ і ітерацію}$$

з номером  $n = 2^k$  отримаємо за  $k$  кроків множень блочної матриці  $\bar{\beta}_1$ .

Тут

$$\bar{\gamma}_{k-1} = \left[ \bar{E} + \bar{B} + \bar{B}^2 + \bar{B}^3 + \dots + \bar{B}^{k-1} \right] \bar{A}. \quad (9b)$$

Зрозуміло, що, наприклад,  $n = 1\,048\,576$  ітераціям алгоритму (8) відповідає  $k = 20$  кроків ітераційної процедури (9). Процедuru обчислень можна ще більше прискорити, якщо врахувати, що вираз у квадратних дужках у (9б) є

геометричною прогресією (спадною, якщо ітераційна процедура (8), (9) сходиться до певного значення). Сума членів спадної матричної геометричної прогресії має такий вигляд:

$$\bar{E} + \bar{B} + \bar{B}^2 + \bar{B}^3 + \dots + \bar{B}^{k-1} + \dots = (\bar{B} - \bar{E})^{-1}. \quad (10a)$$

Тоді згідно з (8)

$$[\Delta\sigma_r] = (\bar{B} - \bar{E})^{-1} \bar{A}, \quad (10b)$$

тобто ітераційна процедура взагалі зводиться до обчислення оберненої матриці.

Як приклад розглянемо фантом на рис. 1, б, в якому для простоти подання попарно об'єднано зони I і II, III та IV, V та VI, VII (без об'єднання), VIII (без об'єднання), IX і X, XI і XII, XIII та XIV. Неоднорідність – круг у центрі фантома з провідністю  $\sigma_1 = 0,01$ , провідність фону  $\sigma_0 = 1$ . Обчислення корегуючих прирошень провідностей зон (для першої ітерації загального ітераційного алгоритму) проводились при підключенні джерела струму до вузлів 0–8 (табл. 1) та 0–7 (табл. 2). В таблицях також наведено значення похибок (при  $\alpha = 0,035$ ), які оцінювалися як різниці між обчисленими  $\Delta Z_{\text{обч}}$  за виразами (і), тобто (5), (9), (10), та наданими  $\Delta Z_{\text{вим}}$  в (2) значеннями прирошень передаточних опорів:

$$\delta_{(i)} = \frac{\Delta Z_{\text{обч}} - \Delta Z_{\text{над}}}{\Delta Z_{\text{над}}}.$$

Результати обчислень, наведені в табл. 1, свідчать про те, що при симетричному підключенні джерела струму (визначник матриці похідних  $\Delta_1 = -1,41 \cdot 10^{-27}$ ) усі корегуючи прирошення провідностей різні при реалізації різних виразів (5), (9), (10).

**Таблиця 1.** Значення корегуючих прирошень і похибок на першій ітерації, обчислені за алгоритмами (5), (9) та (10) при підключенні джерела струму в положенні 0–8

№ зони	Обчислення за (5)	Похибка $\delta_{(5)}$	Обчислення за (9)	Похибка $\delta_{(9)}$	Обчислення за (10)	Похибка $\delta_{(10)}$
I, II	0,76049	$-7,15 \cdot 10^{-4}$	1,78607	$-6,32 \cdot 10^{-3}$	0,05188	$-4,82 \cdot 10^{-4}$
III, IV	0,67064	0,004126	1,57788	-0,00865	-0,13723	-0,00072
V, VI	0,14074	0,006036	1,76358	-0,00953	0,02964	-0,00057
VII	0,01402	-0,00975	1,61475	-0,01113	-0,113	-0,00054
VIII	0,01405	-0,00486	-1,73914	-0,01169	0,02396	-0,00201
IX, X	0,88422	0,003345	-5,64575	-0,00534	-3,90468	0,003166
XI, XII	3,98822	0,003283	35,8988	$-5,13 \cdot 10^{-3}$	37,61966	$3,17 \cdot 10^{-3}$
XIII, XIV	2,26227	0,000209	-14,6166	$-9,20 \cdot 10^{-3}$	-12,89141	$-2,01 \cdot 10^{-3}$

**Таблиця 2.** Значення корегуючих прирощень і похибок на першій ітерації, обчислені за алгоритмами (5), (9) та (10) при підключенні джерела струму в положенні 0–7

№ зони	Обчислення за (5)	Похибка $\delta_{(5)}$	Обчислення за (9)	Похибка $\delta_{(9)}$	Обчислення за (10)	Похибка $\delta_{(9)}$
I, II	0,00700	$-4,47 \cdot 10^{-5}$	-0,14038053	$7,3 \cdot 10^{-17}$	-0,14038	$9,37 \cdot 10^{-17}$
III, IV	0,44797	-0,0010038	0,41000	$-1,4 \cdot 10^{-17}$	0,41000	$-5,55 \cdot 10^{-17}$
V, VI	0,06246	0,00123903	0,10761	$2,78 \cdot 10^{-17}$	0,10761	$-8,33 \cdot 10^{-17}$
VII	0,05092	-0,00197657	0,15513	$-5,5 \cdot 10^{-17}$	0,15513	$-1,67 \cdot 10^{-16}$
VIII	0,02836	-0,00364423	-0,08359	$-5,5 \cdot 10^{-16}$	-0,08359	$-7,22 \cdot 10^{-16}$
IX, X	0,9813	0,00165875	-0,07802	$4,44 \cdot 10^{-16}$	-0,07802	$2,91 \cdot 10^{-16}$
XI, XII	4,15700	0,00108492	11,32092	$2,71 \cdot 10^{-16}$	11,32092	$4,09 \cdot 10^{-16}$
XIII, XIV	1,89648	0,00131971	-1,49066	$-3,5 \cdot 10^{-16}$	-1,49066	$-1,89 \cdot 10^{-16}$

Це ілюструє неможливість отримання коректних результатів реконструкції. При підключенні джерела струму до вузлів 1–7 (аналогічно до вузлів 1–6) отримано однакові результати при реалізації виразів (9), (10). Результати, отримані за виразом (5), значно відрізняються від результатів, отриманих за виразами (9), (10), що зумовлено внесенням коефіцієнта регуляризації  $\alpha = 0,035$ . Зменшення  $\alpha$  не приводить до наближення до точних значень прирощень (табл. 2), що свідчить про небезпеку при розрахунках за виразом (5) отримати некоректний результат реставрації.

### Результати розрахунків

За допомогою програмного забезпечення, створеного за алгоритмом Ньютона–Рафсона та виразом (10), було проведено машинний експеримент з реконструкції розподілення поверхневих провідностей по напругах, виміряних по обводу контуру фантома.

**Приклад 1.** Нехай надано неоднорідність розміру  $2 \times 2$  скінченних елементів з провідністю фону  $\sigma_0 = 1$  та неоднорідності  $\sigma_1 = 0,01$ . Накладання зонних фантомів дає результат, показаний на рис. 2, а (після відфільтрування пороговим фільтром артефактів зі значно меншим рівнем, ніж рівень реконструйованої неоднорідності). Після фільтрації розмір неоднорідності зменшився до  $1 \times 1$  скінченних елементів і посунувся ближче до краю фантома, що можна пояснити як похибками алгоритму повороту зонних фантомів при накладанні, так і розповзанням маленької неоднорідності в зонному фантомі. Аналогічні результати отримано

для тієї ж неоднорідності, але з провідностями  $\sigma_1 = 0,1; 0,5; 5; 10; 100$ .

**Приклад 2.** Нехай тепер на фантомі дві неоднорідності розміром  $2 \times 2$  скінченних елементів, розташовані близько до краю на одній лінії. Їх поверхневі провідності однакові й дорівнюють  $\sigma_1 = 0,01; 0,1; 0,5; 5; 10; 100$ . Як і в попередньому випадку, вибрані малі розміри неоднорідностей (найбільш несприятливий для реконструкції варіант). Результати реконструкції з проєкцій після порогової фільтрації (вони мало відрізняються при різних провідностях) наведено на рис. 2, б.

На рис. 2 на горизонтальних осях  $x$ ,  $y$  позначено кількість скінченних елементів, на вертикальній осі  $z$  – нормовані значення поверхневого опору.

**Приклад 3.** Як приклад реконструкції методом зон провідностей наведемо результати реконструкції неоднорідності в центрі фантома (рис. 3, а) та двох неоднорідностей між центром і краєм (рис. 3, б). Після обробки зображень пороговим фільтром, отримуємо образи рис. 4, а та 4, б відповідно.

Отримані результати (див. рис. 2–4) свідчать про коректність запропонованого методу зон провідності й ефективність швидкої модифікації ітераційного алгоритму регуляризації.

Складність алгоритмів візуалізації розподілу провідностей усередині фантома, значні витрати часу на реконструкцію образів з проєкцій, мала чутливість напруг по обводу контуру фантома (така, що в ряді випадків за результатами вимірювань неможливо розв'язати зворотну задачу) вимагають створення математичного апарату оцінки спроможності реконструкції образів.



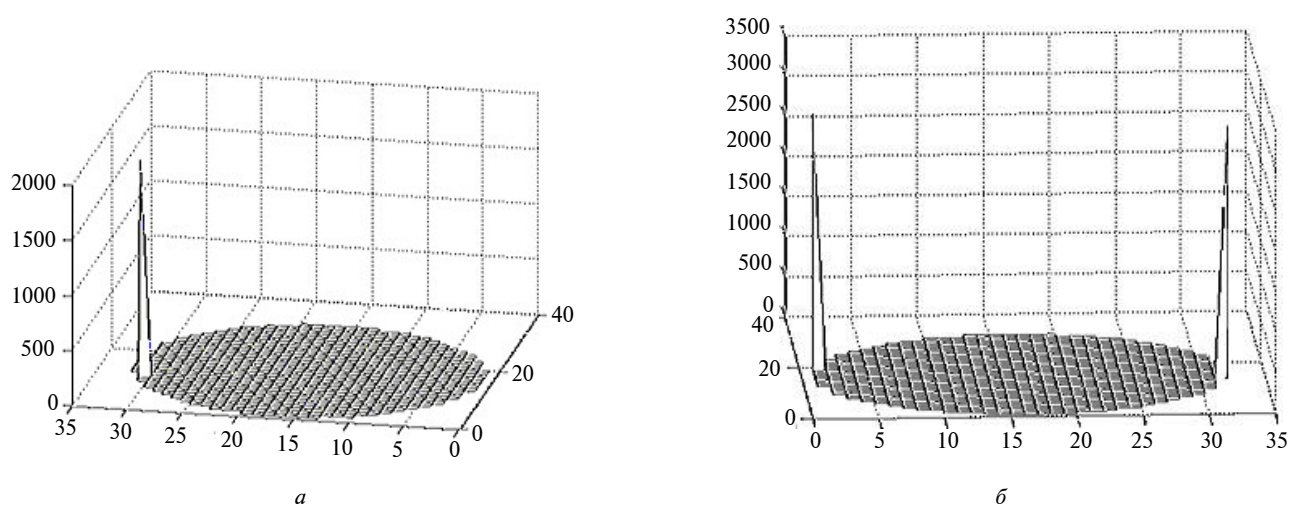


Рис. 2. Розподіл опорів після порогової фільтрації реконструйованого образу фантому з однією малою неоднорідністю на краю фантома (а) та двома малими неоднорідностями на його протилежних краях (б)

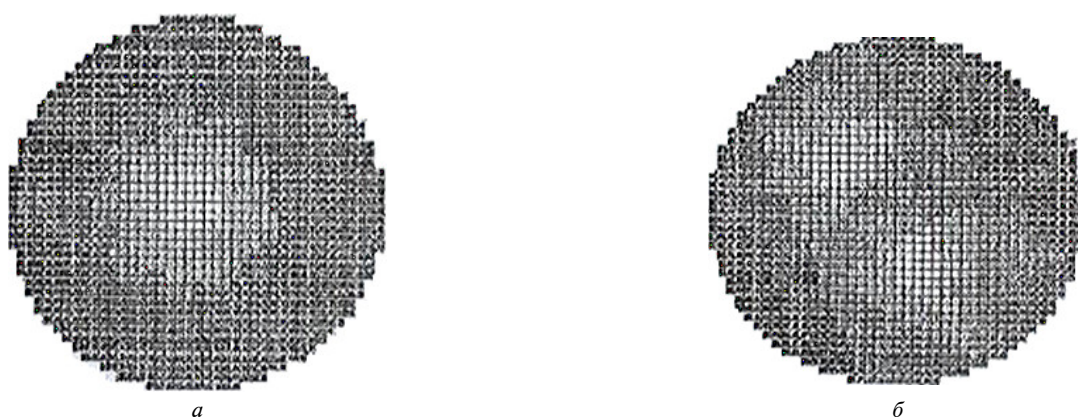


Рис. 3. Реконструйований образ з неоднорідністю в центрі фантома (а) та з двома неоднорідностями між його центром та краєм (б)

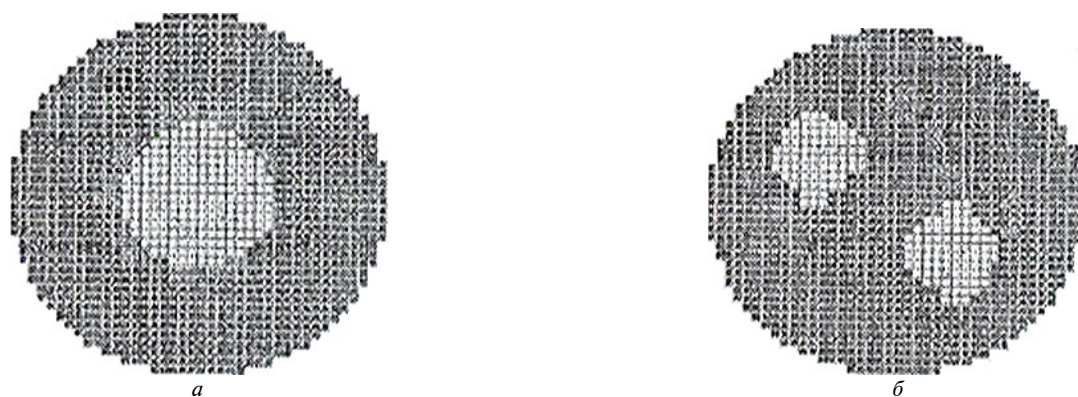


Рис. 4. Реконструйований образ після порогової фільтрації з неоднорідністю в центрі фантома (а) та з двома неоднорідностями між його центром та краєм (б)

Як показано в [22], при зменшенні розміру неоднорідного графоелемента в результаті обчислень візуалізація такої неоднорідності не відбувається (навіть при великих відхиленнях її про-

відності від провідності фону). Тому перед початком обчислень внутрішнього розподілу опорів фантома зручно мати простий інструмент оцінки подібності вимірюваних значень напруг до



напруг рівномірного (еталонного) фантома (або будь-якого іншого еталонного фантома).

Таким простим інструментом є класифікатор на базі дискретного нормального ортогонального перетворення [31, 32].

### Нормальне ортогональне перетворення

Нормальне перетворення тестового сигналу має лише одну ненульову трансформанту. Алгоритм формування матричного оператора дискретного ортогонального перетворення наведено в [16]. При усередненні вимірювань (при тому самому положенні джерела струму) по ансамблю реалізацій отримуємо математичне очікування вузлових напруг вимірювання. За отриманим математичним сподіванням відповідно до алгоритму [16] будується матричний дискретний оператор нормального перетворення (його перша трансформанта з точністю до постійного множника збігається з отриманим математичним сподіванням). Спектр перетворення математичного сподівання містить лише одну (першу) трансформанту. Спектри кожної з реалізацій мають першу трансформанту та додатково ненульові трансформанти вищих порядків. Їх величина характеризує ступінь відмінності реалізації з ансамблю від математичного сподівання. Чисельно величина відмінності (подібності) реалізації до математичного сподівання оцінюється за допомогою коефіцієнта трансформант:

$$k_T = \frac{\sqrt{\sum_{i=2}^{N-1} A_i^2}}{A_1}, \quad (11)$$

де  $N$  – кількість вимірюваних напруг при даному положенні джерела струму;  $A_i$  – амплітуда  $i$ -ї трансформанти.

Для рівномірного фантома були виміряні та розраховані (за моделлю рис. 1, а) вузлові напруги. Аналогічно, для того ж фантома з неоднорідністю в центрі (розміри неоднорідностей 24, 104 та 232 скінченних елементів) проведено обчислення проєкцій. Приймаючи за еталон напруги рівномірного фантома при підключенні джерела струму до вузлів 0–8, проведено обчислення коефіцієнтів трансформант для напруг (при тому самому положенні джерела) обчислених і вимірюваних (із вказаними неоднорідностями). Результати обчислень коефіцієнта трансформант для розрахованих та вимірюваних напруг (з різними провідностями неоднорідностей  $\sigma$ ) наведено в табл. 3 і 4 відповідно.

З результатів, наведених у табл. 3, видно, що коефіцієнти трансформант, розрахованих напруг по обводу контуру, значно відрізняються між собою (як при зміні провідності неоднорідності, так і при зміні розмірів неоднорідностей). Коефіцієнти трансформант, отримані для вимірюваних напруг на макеті (внаслідок похибок вимірювань), для маленької неоднорідності і рівномірного фантома між собою не відрізняються (з практичного досвіду відомо, що в цьому випадку ймовірність коректної реконструкції дуже мала). В разі великої неоднорідності коефіцієнти трансформант відрізняються сильно (на практиці це відповідає можливості успішної реконструкції).

Таблиця 3. Коефіцієнти трансформант, розраховані за змодельованими значеннями напруг на електродах

Неоднорідність в центрі	$k_T$ при					
	$\sigma = 100$	$\sigma = 10$	$\sigma = 5$	$\sigma = 0,5$	$\sigma = 0,1$	$\sigma = 0,01$
Однорідний	0	0	0	0	0	0
Велика	36	35	34	38	43	43
Середня	9,057	8,704	8,355	14	13	14
Мала	0,6378	0,598	0,5541	5,238	1,962	1,473

Таблиця 4. Коефіцієнти трансформант, розраховані за вимірюваними на макеті значеннями напруг на електродах

Неоднорідності	Коефіцієнти трансформант
Однорідний фантом	1,091
Мала неоднорідність (в центрі) з великим опором	0,944
Мала неоднорідність (в центрі) з малим опором	1,226
Велика неоднорідність (в центрі) з великим опором	9,376
Велика неоднорідність (між центром і краєм) з великим опором	858

Результати, наведені в табл. 3 і 4, свідчать про можливість створення та використання нормального класифікатора для оцінки наявності або відсутності неоднорідності порівняно з рівномірним фантомом.

### Висновки

Для моделювання фантома (розтину досліджуваного об'єкта) ЕІТ доцільно використовувати метод скінченних елементів, що дає змогу моделювати систему рівноваги такого фантома системою лінійних рівнянь вузлових напруг. Для розв'язання прямої задачі із врахуванням розрідженості матриці адмітансів запропоновано використовувати метод модифікацій, адаптований саме для цієї задачі, що дає можливість з високою точністю та швидкістю аналізувати фантоми з сотнями—тисячами скінченних елементів.

Наявність великої кількості скінченних елементів фантома веде до високих порядків (тисячі) матриць похідних при реалізації методу Ньютона—Рафсона (та будь-якого іншого ітераційного методу). При цьому матриці похідних є погано зумовленими, що створює значні труднощі в разі розв'язання зворотної задачі. Для їх подолання запропоновано метод зон провідності, який полягає у створенні складних скінченних елементів (які складаються з певної великої кількості базових квадратних скінченних елементів).

### Список літератури

1. *B.H. Brown and D.C. Barber*, "Electrical Impedance Tomography", *Clinical Phys. and Physiolog. Measurement*, vol. 13, suppl. A, 207 p., 1992.
2. *D.S. Holder*, Ed., Part 1 of *Electrical Impedance Tomography: Methods, History and Applications*. Bristol: Institute of Phys. Publ., 2004, pp. 54–64.
3. *Физика визуализации изображений в медицине: в 2-х томах* / Пер. с англ.; под ред. С. Уэбба. — М.: Мир, 1991. — 408 с.
4. *Электроимпедансная томография* / Я.С. Пеккер, К.С. Бразовский, В.Ю. Усов и др. — Томск: ООО "Изд-во науч.-техн. лит-ры", 2004. — 190 с.
5. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. — М.: Наука, 1973. — 632 с.
6. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1977. — 332 с.
7. *Сильвестр П., Феррари Р.* Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. — М.: Мир, 1986. — 230 с.
8. *Рыбин А.И.* Решение задач моделирования обращением матрицы методом взаимных производных // *Радиоэлектроника (Изв. вузов)*. — 1978. — № 6. — С. 53–59.
9. *Рыбин А.И.* Численно-символьный анализ электрических цепей обобщенным методом модификации // *Праці Ін-ту Електродин. НАН України, ІЕД НАНУ*. — 2002. — № 1. — С. 28–30.
10. *Основи теорії кіл: Підручн. для студ. ВНЗ. Ч. 2.* / Ю.О. Коваль, Л.В. Гринченко, І.О. Милютченко, О.І. Рибін / За заг. ред. В.М. Шокала та В.І. Правди. — Х.: ХНУРЕ; Колегіум, 2006. — 668 с.
11. *Рибіна (Сушко) І.О., Гайдаєнко Є.В.* Моделювання кінцевого елемента в імпедансній томографії // *Вісн. НТУУ "КПІ". Сер. Радіотехн. Радіоапаратобуд.* — 2010. — № 41. — С. 19–24.
12. *Достал Т., Сушко І.О., Мацай А.О. та ін.* Чутливість напруг по обводу контуру фантома до змін комплексних опорів неоднорідностей в електроімпедансній томо-

Використання регуляризації за А.М. Тихоновим робить матриці похідних добре зумовленими, хоча при виборі коефіцієнта  $\alpha$  наосліп можливі значні відхилення отриманих результатів від істинних.

Для підвищення точності обчислення корегуючих прирошень провідностей доцільно використовувати великі коефіцієнти  $\alpha$  з наступною ітераційною процедурою обернення матриць похідних. Але це потребує дуже великої кількості ітерацій і призводить до великих витрат часу.

Ітераційна процедура з логарифмічним кроком дає змогу отримати результат за  $M$  ітерацій замість  $2^M$  класичного алгоритму.

Безітераційна (компактна) процедура обчислення корегуючих прирошень дає можливість отримати результат оберненням матриці невеликого (6–30) порядку.

Показано доцільність створення класифікатора для оцінки наявності або відсутності неоднорідності порівняно з рівномірним фантомом.

У подальшому використання цих методів дасть можливість значно скоротити час розрахунків внаслідок зменшення кількості операцій, а отже, і накопичення операційної помилки.

Це дає можливість використовувати дані методи для реконструкції образів в ЕІТ у реальному масштабі часу та поширити їх для розв'язання задач реконструкції об'ємних образів.

- графії // Вісн. НТУУ “КПІ”. Сер. Радіотехн. Радіоапаратобуд. – 2014. – № 56. – С. 145–152.
13. *Рибіна (Сушко) І.О., Гайдаєнко Є.В.* Моделювання прямокутного та трикутного кінцевого елемента в імідансній томографії // Матер. IV наук.-техн. конф. студ., аспір. та молод. вчених. – 2010. – К., КПІ. – С. 21–23.
  14. *Рыбина (Сушко) И.А.* Решение прямой задачи импедансной томографии методами теории цепей // Вісн. НТУУ “КПІ”. Сер. Радіотехн. Радіоапаратобуд. – 2010. – № 43. – С. 4–13.
  15. *Сушко І.О.* Алгоритм розв’язання прямої задачі імідансної томографії методом модифікацій // Вісн. НТУУ “КПІ”. Сер. Радіотехн. Радіоапаратобуд. – 2011. – № 47. – С. 165–175.
  16. *Сушко І.О., Гайдаєнко Є.В., Якубенко О.А.* Потенційна чутливість імідансної томографії // Вісн. НТУУ “КПІ”. Сер. Радіотехн. Радіоапаратобуд. – 2012. – № 50. – С. 92–104.
  17. *Рибіна (Сушко) І.О.* Метод променів провідностей та моделювання фантома в імідансній томографії // Вісн. ЖДТУ. – 2010. – № 2(53). – С. 160–161.
  18. *Рибіна (Сушко) І.О., Рибін О.І., Шарпан О.Б.* Обчислення похідних від передаточного опору по поверхневій провідності кінцевих елементів при розв’язанні зворотної задачі імідансної томографії // Вісн. НТУУ “КПІ”. Сер. Радіотехн. Радіоапаратобуд. – 2011. – № 44. – С. 5–11.
  19. *Рибіна (Сушко) І.О., Рибін О.І., Шарпан О.Б.* Розв’язання зворотної задачі імідансної томографії методами зон провідностей та зворотної проєкції // Вісн. НТУУ “КПІ”. Сер. Радіотехн. Радіоапаратобуд. – 2011. – № 45. – С. 33–45.
  20. *Сушко І.А., Рыбин А.И.* Сравнение классического метода решения обратной задачи с методом “зон” проводимости // Вісн. НТУУ “КПІ”. Сер. Радіотехн. Радіоапаратобуд. – 2012. – № 49. – С. 166–177.
  21. *Sushko I., Rybin A.* Features of solving the Electrical Impedance Tomography inverse problem by zones conductivities method // Вісн. НТУУ “КПІ”. Сер. Радіотехн. Радіоапаратобуд. – 2012. – № 51. – С. 106–114.
  22. *Сушко І.А.* Визуализация распределения поверхностных проводимостей томографического сечения методом зон проводимости // Радиоэлектрон. (Изв. вузов). – 2013. – № 7. – С. 60–68.
  23. *Сушко І.* Модифікація ітераційного алгоритму обчислення прирощень поверхневих провідностей при розв’язанні зворотної задачі імідансної томографії // Вісн. НТУУ “КПІ”. Сер. Радіотехн. Радіоапаратобуд. – 2014. – № 57. – С. 109–121.
  24. *Sushko I., Rybin A.* Features of solving the Electrical Impedance Tomography inverse problem by zones conductivities method // Вісн. НТУУ “КПІ”. Сер. Радіотехн. Радіоапаратобуд. – 2012. – № 51. – С. 106–114.
  25. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 142 с.
  26. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А.* Математические задачи компьютерной томографии. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит, 1987. – 160 с.
  27. *M. Vauhkonen et al.,* “Tikhonov regularization and prior information in electrical impedance tomography”, IEEE Trans. Med. Imaging., vol. 17 (2), pp. 285–293, 1998.
  28. *Сушко І.А.* Визуализация распределения поверхностных проводимостей томографического сечения методом зон проводимости // Радиоэлектрон. (Изв. вузов). – 2013. – № 7. – С. 60–68.
  29. *Сушко І.О., Рибін О.І.* Особливості використання методу регуляризації при розв’язанні зворотної задачі імідансної томографії методом зон провідності // Наук. вісті НТУУ “КПІ”. – 2013. – № 5. – С. 18–25.
  30. *A. Rybin et al.,* “Visualization of the conductivity distribution using conductivity zones method and regularization by A.N.Tikhonov”, Матер. Міжнар. наук. конф. Statistical methods of signal and data processing (SMSDP-2013), 16-17 octobers, pp. 78–83.
  31. *Рыбин А.И., Нижебецкая Ю.Х., Кузьменко О.Н. и др.* Анализ подобия и различия образов. Модифицированный метод классификации на базе корреляционной матрицы // Радиоэлектрон. (Изв. вузов). – 2010. – № 11. – С. 29–37.
  32. *Нижебецька Ю.Х., Рибіна (Сушко) І.О., Якубенко О.А.* Комплексне дискретне нормальне ортогональне перетворення // Вісн. НТУУ “КПІ”. Сер. Радіотехн. Радіоапаратобуд. – 2009. – № 38. – С. 5–11.